وثيقة 5	PEMDULUMS SYSTEMS جمل النواسات

2. الهزازات التوافقية الزاوية- جملة النواسات

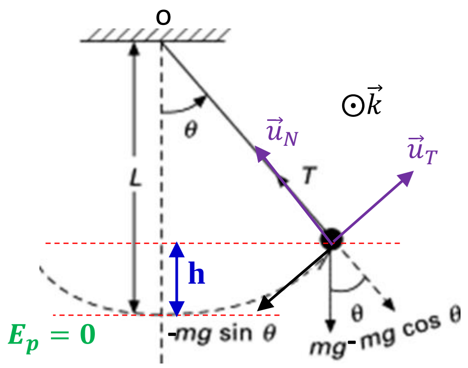
يمكن تحديد جملة النواسات الرئيسية حسب المخطط الآتي (م: II-2). مع ملاحظة أنه توجد جمل عديدة للنواس الثقلي و نواس الفتل حسب شكل الجسم المعلق (قرص، ساق، .....).

جملة النواسات

- النواس البسيط
- النواس الثقلي
- نواس الفتل

أولا: النواس البسيط

تعريف: هو عبارة عن جملة متكونة من كتلة نقطية m موصولة بخيط عديم الإمتطاط أو ساق مهملة الكتلة طولها l يدور حول محور يمر من نقطة التعليق o



نختار أشعة الوحدة $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{k})$ كأساس لمعلم الحركة، ثم نطبق المبدأ الأساسي للتحريك للجمل الدورانية الشكل1 ، بإسقاط القوى على معلم الحركة:

$$\vec{T} = T\vec{u_N}$$

$$\vec{P} = -mg\sin\theta\,\vec{u_T} - mg\cos\theta\,\vec{u_N}$$

- شعاع الموضع:

$$\vec{OM} = -l\,\vec{u_N}$$

الطريقة 1: دراسة الجملة - المبدأ الأساسي للتحريك

- من المبدأ الأساسي للتحريك:

$$\sum M_{/0}\left(\vec{F}\right) = J\,\ddot{\vec{\theta}}$$

$$\vec{OM}\wedge\vec{T} + \vec{OM}\wedge\vec{P} = J\,\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

الحد الأول معدوم، يبقى الحد الثاني:

$$-l\,\vec{u_N}\wedge\left(-mg\sin\theta\,\vec{u_T} - -mg\cos\theta\,\vec{u_N}\right) = J\,\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow\ -mgl\sin\theta\,\vec{k} = J\,\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{mgl}{J}\sin\theta=0$$

لكن عزم عطالة النواس $\left(J=ml^2\right)$، إذن:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

إهتزازات صغيرة $\left(\sin\theta\cong\theta\right)$، حيث الزاوية تقاس بالراديان، إذن:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

وهي معادلة هزاز توافقي . حيث نبض الحركة الإهتزازية :

$$\omega_0^2=\frac{g}{\ell}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

و دورها :

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

الطريقة 2: دراسة الجملة – طريقة الطاقة (رايلي)

الجملة محافظة فبالتالي الطاقة الكلية ثابتة.

- الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (الكتلة m)– لاحظ مرجع الطاقة الكامنة الصفري:–

$$E_P=mgh=mgl(1-\cos\theta)\quad, h=l(1-\cos\theta)$$

- الطاقة الحركية للجملة(حركة دائرية):

$$E_C=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

أو $E_C=\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ حيث: $J_{/o}=ml^2$

- الطاقة الكلية:

$$E_T=E_C+E_P=\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+mg\ell(1-\cos\theta)=cte$$

و منه:

$$\frac{dE_T}{dt}=\frac{d}{dt}(E_C+E_P)=0$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl-mgl\cos\theta\right)=0$$

$$=ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+mgl\dot{\theta}\sin\theta=0$$

$$=ml\dot{\theta}\left(l\ddot{\theta}+g\sin\theta\right)=0\quad,\quad ml\dot{\theta}\neq0$$

إذن :

$$l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

إهتزازات بزوايا صغيرة $(\sin\theta\approx\theta)$، و بالتالي نحصل على:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

وهي نفس المعادلة المستنتجة بطريقة المبدأ الأساسي للتحريك.

الطريقة 2: دراسة الجملة – طريقة لاغرانج

- الطاقة الكامنة للجملة:

$$V=mgl(1-\cos\theta)$$

- الطاقة الحركية للجملة:

$$T=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \quad ، \quad V=l\dot{\theta}=l\omega$$

➢ دالة لاغرانج:

$$L=T-V$$

$$=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$$

➢معادلة لاغرانج (الإزاحة زاوية):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right)+mgl\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow \quad ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow ml\left(l\ddot{\theta}+g\sin\theta\right)=0$$

$ml\neq 0$ ، إذن:

$$l\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

من أجل الإهتزازات الصغيرة $(\sin\theta\approx\theta)$ نجد :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$$

و هي نفس المعادلة المستنتجة بطريقتي المبدأ الأساسي للتحريك و الطاقة.